Увлекательное путешествие по множеству Мандельброта

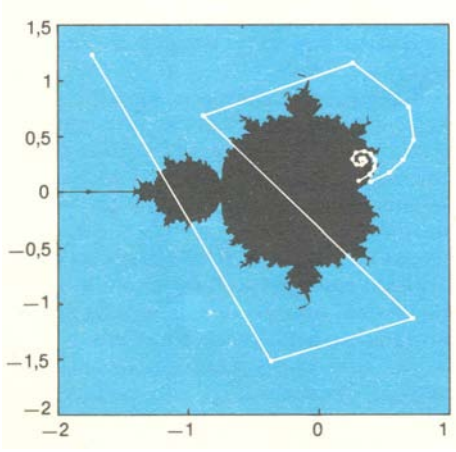
А. К. **ДЬЮДНИ**

Науке и искусству мало лишь служенья;
В работе надо проявить терпенье.
Дух терпеливый к цели медленно идет;
Хорошему вину лишь время крепость придает.

Из Гете

ПОХОЖЕ, что искусство и наука сливаются воедино в множестве Мандельброта. Его поразительная сложность может символизировать развивающиеся сейчас отрасли науки, изучающие свойства хаоса и нелинейных динамических систем. Люди, даже не посвященные в реальное физическое значение этого «объекта», ощущают причудливую красоту его темного ядра и усыпанного «драгоценными камнями» ореола. Мудрое высказывание великого Гете говорит нам о терпении, которым действительно нужно запастись, чтобы получить изображение множества Мандельброта. Хотя персональный компьютер и способен выполнять тысячи вычислений в секунду, может потребоваться несколько часов, прежде чем он построит законченное изображение.

Множество Мандельброта (названное по имени человека, открывшего его, Бенуа Б. Мандельброта из Исследовательского центра Томаса Уотсона фирмы IBM в Йорктаун-Хейтсе, шт. Нью-Йорк) состоит из бесконечного количества точек. Изображения, приведенные в настоящей статье, были построены путем проверки точек из сравнительно небольшой выборки (всего лишь несколько тысяч точек) на принадлежность множеству Мандельброта. Каждый точечный элемент изображения, или пиксел, соответствует какой-нибудь одной точке выборки. Поэтому каждое изображение представляет собой тот или иной фрагмент множества, показанный с некоторым увеличением и в цветовой гамме, выбранной в соответствии со вкусами исследователей множества Мандельброта, приславших автору эти изображения. Наверное, глядя на приведенные здесь иллюстрации, читатели задумаются о природе той красоты, которая таится в множестве Мандельброта. Какие процессы создают эти удивительные формы, эту сложность, простирающуюся в бездну бесконечности? Простота ответа находится в очевидном противоречии со сложностью объекта.



два воЗМоЖНыХ маршрута манделобуса

В двух статьях, опубликованных ранее, уже достаточно подробно говорилось о том, каким образом можно построить множество Мандельброта при помощи компьютера. (См. «В мире науки», 1985, № 10 и 1988, № 1.) На этот раз я постараюсь сделать, так, чтобы даже те, кто испытывает жуткий страх перед математикой, получили представление о множестве Мандельброта. Есть люди, которые, услышав, что множество Манбельброта каким-то образом связано с «комплексными числами»,сразу бледнеют и, торопливо извиняясь, говорят, что им срочно нужно куда-то идти. К счастью, темы комплексных чисел можно вообще не касаться. Я приглашаю таких читателей (а вместе с ними, разумеется, и всех остальных) последовать за мной на манделобусе в путешествие по воображаемой равнине и совершить экскурсию в множество Мандельброта.

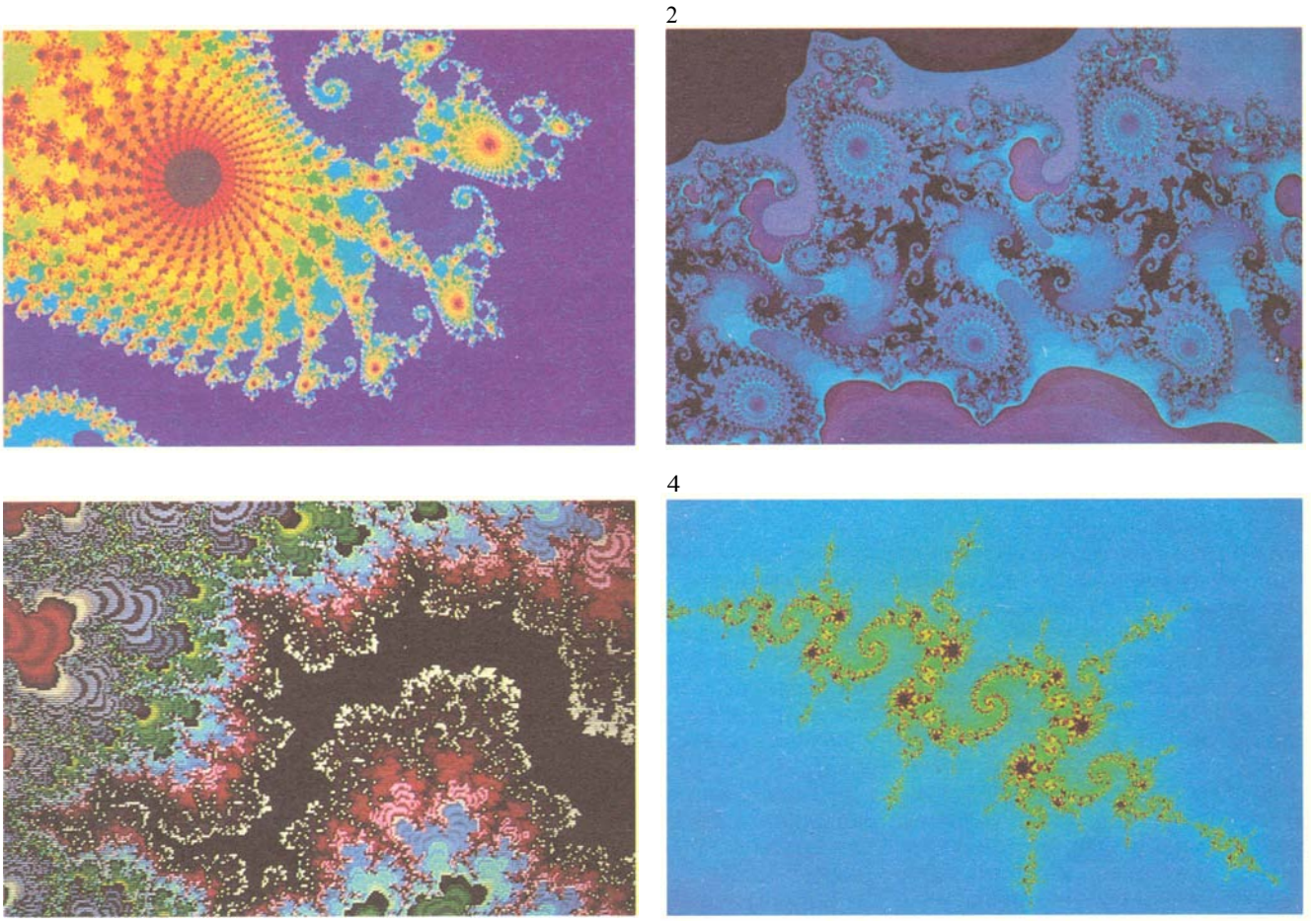
Подобно точкам земной поверхности, положение которых можно определять по широте и долготе, точки на плоскости также имеют координаты. Точка (0,0), называемая началом координат, лежит в центре плоскости. По мановению волшебной палочки я превращаю читателя в невероятно крошечное существо, помещающееся в точке с координатами *(a, b)*. Где находится эта точка? Да где угодно. Но уж коль скоро мы выбрали эту точку, величины *a* и *b* должны иметь конкретные значения, такие, например, как 2,78 и - 0,43. В этом случае читатель будет находится на 2,78 единиц к северу и на 0,43 единицы к востоку от начала координат. Что такое в данном случае единица? В принципе безразлично, считаем ли мы ее равной километру или метру. В конце концов любое расстояние кажется огромным, когда вы сами имеете точечные размеры.

Теперь, когда читатель - крошечный и одинокий - слился с точкой на плоскости, он готов к тому, чтобы начать путешествие на манделобусе, но прежде чем подойдет манделобус, я поясню, каков его маршрут. Начав с точки (0,0), он проследует прямо к точке *(a, b)*, где ожидает его читатель. Читатель будет совершать путешествие в одиночку, потому что ни на одной из бесчисленных остановок, которые будет делать манделобус, продвигаясь от точки к точке, людей больше не будет. Точнее говоря, маршрут манделобуса можно описать сравнительно несложной Формулой, пользуясь которой можно определить, в какой следующий пункт следует ехать после остановки в точке *(x, y)*, а именно

$$(x, y)^2 + (a, b).$$

Что означает эта формула? Член $(x, y)^2$ - это лишь условное обозначение точки, имеющей координаты $x^2 - y2$ И $2xy$. Прибавление *(a, b)* к $(x, y)^2$ означает, что следует прибавить *a* к первой координате, а *b* - ко второй. Таким образом, если мы еще не утомили наших читаталей, в результате этих нехитрых арифметических операций получатся такие координаты: $(x^2 - y2 + a, 2xy + b)$. Где находится эта точка? Чтобы найти ее, подставим в формулу координаты *x* и *y* предыдущей остановки, а также координаты *a* и *b* первой остановки.

Манделобус всегда стартует из начала координат (0,0) и затем сразу оказывается в точке *(a, b)*. Чтобы убедиться в этом, читателю нужно лишь подставить нуль вместо *x* и *y* в приведенной выше формуле. Все квадраты и удвоенное произведение хна *y* сразу исчезают, остаются лишь *a* и *b* - координаты новой точки. Чтобы определить место следующей остановки, нужно просто подставить значения *a* и *b* вместо *x* и *y*, т. е. точка,



Примеры изображений множества Мандельброта

где делается вторая остановка, всегда имеет координаты $(a^2 - b^2 + a, 2ab + b)$.

Дорога, по которой следует манделобус, очень извилиста. Чтобы читатель получил представление о ней, на с. 82 приведены траектории двух возможных маршрутов, показанных как бы с высоты птичьего полета. В первом случае манделобус, отправляясь из начала координат, останавливается·, чтобы подобрать читателя, а затем совершает странную последовательность остановок, которые по спирали ведут его обратно к точке старта. Во втором случае читатель последовательно посещает ряд пунктов, которые сначала располагаются неподалеку друг от друга, но потом расстояние между ними растет, и в конце концов они убегают в бесконечность. Если вы попали на такой рейс, то лучше, наверное, соскочить на ближайшей остановке.

Хотя эти два маршрута так непохожи друг на друга, каждый из них был полностью определен первой остановкой, т. е. точкой с координатами a и b и формулой. Допустим, что в первом случае читатель сел на манделобус в точке (0,300; 0,1(0). Подставив эти координаты в формулу, мы получим координаты следующей остановки (0,380; 0,160). Чтобы немного попрактиковаться в процедуре построения множества Мандельброта, полезно вооружиться калькулятором и вычислить координаты третьей остановки, подставив 0,380 вместо x, 0,160 вместо y, 0,300 вместо a и 0,100 , вместо b в приведенной формуле. В результате получим точку (0,419; 0,222). Вот эти простые, повторяющиеся арифметические действия и движут манделобусом в его бесконечном путешествии.

Хотя поездка может продолжаться сколько угодно долго, пока есть желание повторять циклы вычислений, маршрут, по которому движется манделобус,. будет либо ограниченным, либо неограниченным. Под этими словами я подразумеваю, что последовательность остановок будет всегда заключена внутри какой-то ограниченной зоны вокруг начала координат (как это имеет место в первом случае) либо выйдет за пределы этой зоны и устремится в бесконечность (как во втором случае).

Что же такое множество Мандельброта? Это просто множество всех точек (a, b), в которых манделобус делает остановки на своем маршруте в ограниченной зоне. Множество образует непрерывный континуум в средней части плоскости, вблизи начала координат, с тонкими извивающимися ветвями на периферии. В компьютерных программах, генерирующих изображения множеств Мандельброта, цвет пиксела на экране зависит от того, устремляется ли манделобус в бесконечность из точки (a, b), представляемой данным пикселом, и если да, то насколько быстро.

Некоторым читателям, наверное, спокойнее путешествовать по ограниченным маршрутам, начинающимся внутри множества Мандельброта, поскольку они содрогаются при мысли о путешествии в бесконечность. Однако ограниченность перемещения во время путешествия, кажется, удручает математиков. Наверное, именно поэтому они закрашивают само множество черным цветом.

Существует доказанная теорема (и следовательно, это безусловно верно), что если манделобус когда-либо достигнет точки, отстоящей от начала координат на две и более единиц,

то он в конце концов уедет в бесконечность. Это справедливо в тех случаях, когда точка *(a, b),* где делается первая остановка, лежит за пределами множества Мандельброта. Однако сколько остановок сделает манделобус, уезжающий в бесконечность, прежде чем он удалится от начала координат по крайней мере на две единицы? Это число называется задержкой точки *(a, b).*

Когда пытаешься вычислять задержку точки *(a, b),* трудно решить, где нужно остановиться. Для некоторых точек манделобусу требуется сделать 100 или даже 1000 остановок, прежде чем он навсегда покинет окрестности начала координат. С другой стороны, точка может оказаться внутри множества Мандельброта и в этом случае, сколько бы мы ни продолжали вычисления, соответствующий пиксел все равно придется окрасить в черный цвет. Вблизи границы множества располагаются точки с очень высокими значениями задержки. Для этих точек иногда приходится сделать миллион итераций, прежде чем манделобус достигнет критического расстояния в две единицы от начала координат. Поэтому программа должна принимать в какой-то мере произвольное решение, когда следует прекратить расчеты по формуле для заданной точки *(a, b).* Такие предельные значения, как 100 или даже 50 итераций, приводят к очень красивым и сравнительно точным изображениям множества, несмотря на то, что некоторые пикселы окажутся окрашенными в черный цвет.

Выбор других цветов, помимо черного, также зависит от задержки для той точки, которая соответствует данному пикселу. Например, программист может решить, что цвет пиксела должен быть либо черным, либо фиолетовым, либо зеленым, если представляемые им точки имеют задержку соответственно от 100 и выше, от 50 до 99 или от 1 до 49. Цвета и диапазоны задержки, соответствующие каждому цвету, можно выбирать произвольно, однако от этого выбора зависит, получится ли изображение красивым (как на приведенных иллюстрациях) либо с художественной точки зрения оно окажется непривлекательным (к чему, как я подозреваю, привел бы мой собственный выбор цветовой гаммы). На самом деле половина задачи, стоящей перед программистом, заключается в том, чтобы выбрать цвета для точек, лежащих за пределами множества, а другая половина - в том, чтобы выбрать интересные области на плоскости для построения изображения. Следует отметить, что между этими двумя выборами существует взаимная зависимость, потому что именно благодаря выбору цвета становятся видимыми области, получившие такие названия, как Долина морского конька и Самый дальний запад (где обитают удивительнейшие существа).

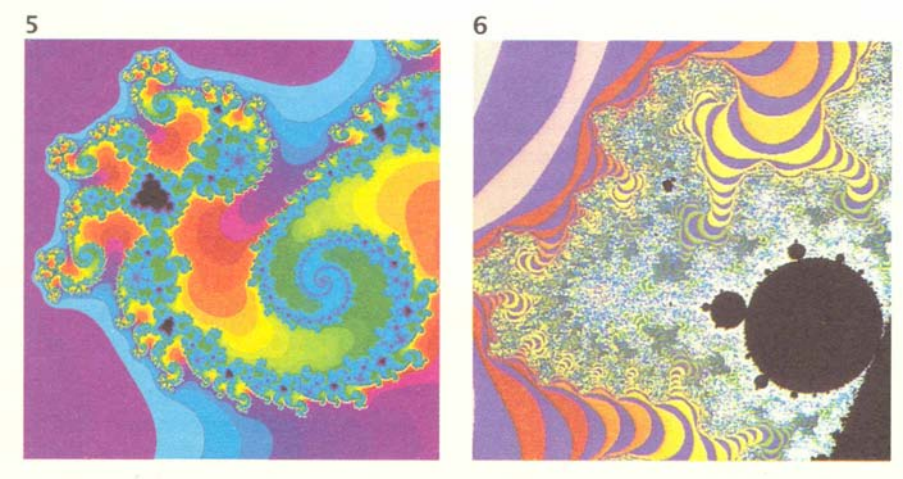
Чтобы заполнить весь экран компьютерного дисплея цветными элементами, принадлежащими и не принадлежащими множеству Мандельброта, нужно поочередно взять в качестве значений a и b координаты каждого пиксела на экране из заданного диапазона значений a и b. Это можно сделать при помощи двух циклов. Водном цикле варьирует a, принимая значение через каждую 11200 в пределах заданного диапазона. Второй цикл, в который вложен первый, изменяет значение b для такого же количества шагов в диапазоне, ограничивающем значения b. Число шагов в каждом цикле должно соответствовать числу пикселов по горизонтали (для a) и по вертикали (для b) с учетом размера экрана того компьютера, на котором строится изображение.

Поскольку каждое изображение содержит лишь конечную выборку точек в какой-то области множества Мандельброта, оно никогда не сможет отразить всех деталей реальной картины. Однако, сужая диапазоны измерения a и b, можно повысить степень «увеличения». В действительности множество Мандельброта имеет уйму сложных деталей на всех уровнях увеличения. Поэтому одной из самых популярных игр для всех, увлеченных множеством Мандельброта, является увеличение отдельных областей множества до пределов, допускаемых возможностями аппаратуры, программы и просто человеческого терпения.

Увеличение заданной области изображения можно рассчитать следующим образом. Допустим, что мы строим на плоскости изображение квадратной области со стороной s. В таком случае увеличение для данного изображения будет равно $1/s$. Так, квадратное изображение со стороной 0,02 единицы, например, при построении на всем экране будет иметь увеличение 50.

У меня часто возникает соблазн самому сесть в манделобус и переключить его управление с автоматического режима на ручной. Думаю, было бы увлекательно прокатиться по завиткам множества Мандельброта, осматривая их окрестности. Например, уже вдали от множества можно встретить его миниатюрные копии, как бы свободно плавающие на плоскости. По утверждениям математиков, множество Мандельброта на самом деле связано, так что можно доехать на манделобусе до каждой миникопии множества. Однако маршрут не будет похож ни на одну земную дорогу. Если последовательно увеличивать практически любую из ветвей, окружающих множество Мандельброта, то видны будут лишь цепочки крошечных черных островков, которые кажутся не связанными друг с другом. Конечно, мы найдем цепочки более мелких островков между крупными островами, однако непрерывная дорога встречается редко или вообще не обнаруживается ни при каком увеличении.

А теперь я уступаю роль гида некоторым из наших читателей, которые после многочасовых исследований и тонкой художественной настройки создали замечательные изображения множества. Так, У. Стриклер из Баулдера (шт. Колорадо) прислал изображение под номером 1. Названное «павлином», оно было построено



«Спираль» (слева) *и «мини-Мандельброт»* (справа)

программой, которую Стриклер написал для своего компьютера «Амига». Значения *a* в его программе менялись в пределах от -0,750до -0,746, а значения *b* - от 0,0986 до 0,1014. Степень увеличения для изображения, полученного Стриклером, нетрудно подсчитать по вышеприведенной формуле. Меньшая сторона прямоугольника, в котором разместилось изображение, имеет длину 0,0028. Подсчитав обратную величину (1/0,0028), получим увеличение, примерно равное 357.

Изображения 2, 3 и 4 заимствованы из журнала «Amygdala», издаваемого Р. Силвером в Сан-Кристобале (шт. Нью-Мексико). На изображении 2, построенном Дж. Джонсом из Бернаби (Британская Колумбия), в увеличенном виде показана хвостовая часть «морского конька». Морские коньки являются неотъемлемым элементом мини-копий множества Мандельброта, очерчивающих линию, которая отделяет восточную часть от западной части множества. Практически любой морской конек даст аналогичное изображение, если правильно подобрать увеличение и цвета.

Изображение 3 названо «каналом любви» и было получено А. Ламансом из Вартбурга (шт. Теннесси). Думаю, что это название относится к одному очень загрязненному месту неподалеку от Ниагара-Фолса (шт. Нью-Йорк). Черная часть множества Мандельброта напоминает сточную канаву, наполненную токсичными веществами, в которой пытаются выжить странного вида водоросли. Центр этого изображения находится в точке с координатами (0,235125; 0,82722) и показано оно при колоссальном увеличении в 24 800 раз.

К. Филип из Фэрбанкса (Аляска), еще один из издателей журнала «Amygdala», достиг увеличения 54000 в изображении под номером 4, показывающем один из маленьких объектов, похожих на скипетр и разбросанных около мсрских коньков. Читатели, которые пожелают сами исследовать эту область, должны быть готовы к большой вычислительной работе. Центр данного изображения находится в точке (-1,26446153; 0,04396696).

М. Адлер воспользовался сетью ЭВМ в исследовательском центре Apollo в Челмсфорде (шт. Массачусетс), чтобы рассчитать орнамент из спиралей на изображении 5. Читатели, желающие воспроизвести эту часть множества Мандельброта, должны будут выбрать подходящие цвета для значений *a* и *b,* изменяющихся соответственно в диапазонах между 0,31186 и 0,31458 и между 0,75322 и 0,75594. Чтобы построить такое изображение, необязательно прибегать к сети ЭВМ (увеличение здесь равно 368), если, конечно, вам не нужно, чтобы оно было построено за несколько секунд.

7

Россыпи драгоценных камней в изображении, полученном Дж. Крамом

Изображение 6 получено Р. Спроутом и сфотографировано Р. Макколи из Сан-Франциско (шт. Калифорния). Изображение показывает одну из мини-копий множества Мандельброта, отпочковывающихся от родительского тела по бокам. Увеличение здесь приблизительно равно 20.

Печатая фрагменты множества Мандельброта на бумаге, можно получить такие же красивые изображения, как и на экране дисплея. На картинке 7 видно, как Дж. Краму,' научному сотруднику из Луи свила (шт . Огайо), удалось запечатлеть россыпи рубинов, изумрудов, аметистов и других драгоценных камней, свидетельствующих о неисчерпаемых богатствах множества Мандельброта, таящихся неподалеку от той области, которую показывает изображение, полученное Спроутом. Однако в данном случае Крам решил не закрашивать черным цветом точки, принадлежашие самому множеству. В правой части изображена мини-копия множества Мандельброта, покрытая серыми полосами.

Теперь любители могут получать подобные изображения значительно быстрее, чем это раньше было возможно при использовании домашнего компьютера. Например, можно применить алгоритм Мариани, названный по имени Р. Мариани, работавшего программистом в Научно-исследовательском центре провинции Онтарио в Торонто (Канада). В основе алгоритма лежит простая идея: если пикселы, находящиеся на границе прямоугольной области, уже окрашены черным цветом (т. е. в отношении соответствующих им точек установлено, что они являются членами множества Мандельброта), то все пикселы, лежащие в ограниченном ими квадрате, также будут черными. Другой «быстрый» алгоритм был описан У. Фишером в его замечательной новой книге «Наука фрактальных изображений» («The Science of Fractal Images»), вышедшей под редакцией Х.-О. Пайтгена и его коллеги Д. Зупе из Бременского университета. Быстрота этого алгоритма объясняется тем, что он не вычисляет точки, при надлежащие множеству Мандельброта. Вместо этого он разбивает прилегающую к нему зону на тысячи дисков неодинакового размера и ограничивает вычисления только этими дисковыми областями.

Тем американским читателям, у кого нет времени или желания исследовать множество Мандельброта на своих собственных компьютерах, можно порекомендовать видеокассету под названием «Только увеличения» («Nothing but Zooms»), выпущенную компанией ART MATRIX в Итаке (шт. Нью-Йорк). Она содержит потрясающие фрактальные изображения, на которые было затрачено более 40 тыс. долл. в уплату за ма-

шинное время, потребовавшееся для их построения в Корнеллском национальном центре суперкомпьютеров.

В НАШЕЙ декабрьской статье, посвященной шифровке и расшифровке сообщений, утверждалось, что зашифрованный текст одним человеком (или машиной) может быть расшифрован другим человеком (другой машиной). На самом деле существует одно хорошо известное исключение из этого правила, но в той статье уже не было места, чтобы сказать об этом. Незашифрованное сообщение, полученное мною от Дж. Шуи, студента из Такома-Парка (шт. Мэриленд), напомнило мне о так называемом одноразовом блокноте. В простой версии этой системы кодирования используется цепочка случайных целых чисел от 0 до 25, при помощи которых кодируется каждая буква алфавита в исходном тексте сообщения. При этом i-я буква сообщения кодируется числом со сдвигом на n позиций по алфавиту, где n определяется как i-е случайное число кодирующей цепочки.

Криптографы называют такую цепочку случайных целых чисел блокнотом: он «одноразовый», потому что, закодировав сообщение, им больше не пользуются. Конечно, получатель текста, зашифрованного этим способом, также должен располагать точно таким же блокнотом. Подобный код расшифровать невозможно, потому что в зашифрованном сообщении нельзя уловить ни малейшей закономерности. Сам Шуи генерирует одноразовые блокноты по представлению букв алфавита внутри компьютера.

По мнению Дж. Миченера из Принстона (шт. Нью-Джерси), существуют довольно простые алгоритмы кодирования, отличающиеся от метода одноразовых блокнотов, которые не только можно применять в программах для домашнего компьютера, но с их помощью получать коды, чрезвычайно трудно Поддающиеся расшифровке. Эти алгоритмы основаны на удалении лишней информации из сообщения и сжатия его в минимально возможную цепочку битов. Затем сжатое сообщение подвергается операциям перестановки и замены битов. Миченер, написавший несколько научных статей по криптологии, утверждает, что «такой код будет слишком сложным, для того чтобы какой-нибудь любитель (или даже профессионал) смог расшифровать сообщение».

Несколько читателей указали на два солидных издания, которые могут заинтересовать нашу аудиторию. Первое - это книга под названием «Машинная криптография и современный криптоанализ», написанная С. Девуарсом и Л. Кру (C. A. Deavours, L. Kruh. «Machine Cryptography and Modern Cryptanalysis»). Второе- это ежеквартальный журнал «Криптология», одним из редакторов которого является тот же Кру.

И наконец, говоря о публикациях, нельзя не упомянуть о периодическом издании «REC», посвященном всевозможным головоломкам. Журнал «REC» (от слов Recreational and Educational Computing - занимательные и познавательные вычисления) выходит в США под редакцией М. Эккера.

Наука и общество

Мыши на продажу

В ЭТОМ году в мышином питомнике Чарлз-Ривер появились новые обитатели - так называемые онкомыши. Скоро там будет несколько сотен генетически идентичных особей. Эти животные, которые являются продуктом генетической инженерии, прямо-таки выпрыгнули из научных лабораторий на первые страницы газет по всей стране прошлой весной, когда Бюро патентов и коммерции США выдало Гарвардскому университету первый патент на трансгенное животное. Данная линия мышей обладает врожденной предрасположенностью к развитию рака в результате того, что в геном внесен соответствующий ген. Ученые рассчитывают, что с помощью таких животных можно будет проверять новые методы лечения рака и, поскольку они представляют собой лучшую модель заболевания, это позволит сократить расход лабораторных животных.

Новая линия получена сотрудниками Гарвардского университета Ф. Ледером и Т. Стюартом. Они ввели онкоген в мышиный эмбрион вскоре после зачатия. Свои исследования Ледер осуществил в основном на средствА компании Ои Pont (которая ранее занималась химическими препаратами), так что ей принадлежат коммерческие права на результаты его работы. Однако, по словам сотрудника Du Pont А. Формана, который является менеджером по производству онкомышей, руководство компании *не ожидало, что в результате контракта с учеными будет* выведено «патентованное» животное. «Узнав о получении патента, я тотчас задался вопросом: как из этого сделать бизнес?» - вспоминает он.

Прошло около полугода и серьезные торговые сделки убедили администрацию Du Pont в том, что онкомыши отлично вписываются в специализацию компании. Сказано - сделано. Из лаборатории Ледера взяли четырех таких животных и занялись их разведением. Как сказал Форман, «Ледер делает, мы извлекаем выгоду».

В Du Pont начали с гетерозиготных особей (т. е. таких, в геноме которых содержится одна копия онкогена) и, скрещивая их, создали «племенное стадо» проверенных гомозиготных животных, несущих по две копии данного гена. В январе прошлого года на Чарлз-Ривер вплотную принялись за работу. Животных на продажу производят путем скрещивания самцов инбредной линии гомозиготных онкомышей с самками нормальных мышей также инбредной линии. В результате инбридинга получается генетически идентичное гетерозиготное потомство. Животных содержат в стерильном помещении, условия в котором контролируются автоматизированной системой. На тот случай, если данная линия спонтанно мутирует, ряд линий «законсервирован»: соответствующие эмбрионы хранятся в жидком азоте. Мышей транспортируют на автомашинах в специальных камерах, в которых поддерживаются определенные условия.

Компания Du Pont вначале поставит онкомышей некоммерческим исследовательским группам и университетам по цене примерно 50 долл. за одну особь (со скидкой при закупке больших партий). По цене онкомыши конкурентоспособны с другими специальными линиями мышей, обычные же животные стоят гораздо дешевле - вплоть до 1 долл. за особь.

Конечно, отмечает Форман, ничто не препятствует исследовательским лабораториям самим разводить онкомышей. Но хотя в Du Pont рассматривалась возможность продавать животных только одного пола или стерилизованных с целью охраны своих патентных прав, в конце концов было принято решение положиться на честность и на то, что очень часто в исследованиях необходима уверенность в генетической однородности используемых животных.

Поскольку патент распространяется на всех возможных трансгенных млекопитающих (кроме человека) с онкогенами, а таких генов известно около 40, Форман полагает, что трансгенные мыши - только начало